

### T.P. Modèle d'endémie (Scopos vol. 11, p. 27-35)

La chaîne de Markov du modèle probabiliste a pour espace d'états  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ , sa matrice de transition est donnée par

$$P(I_{t+1} = j \mid I_t = i) = \begin{cases} C_{N-i}^j (1-q)^j q^{i(N-i-j)} & \text{si } i+j \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Construire une fonction SCILAB prenant pour arguments  $N$  et  $p = 1 - q$  (probabilité de contamination) et retournant la matrice  $P$ .

**Indication** : utiliser la fonction `binomial`. Vérifier le résultat sur un exemple simple ( $N = 3$ ,  $p = 0.1$ ).

2) Construire une fonction SCILAB prenant pour arguments  $N$  et  $p = 1 - q$  et retournant le vecteur  $(E_1(T), \dots, E_i(T), \dots, E_{N-1}(T))$ , où  $E_i(T)$  désigne l'espérance, partant de l'état  $i$ , de la durée  $T$  de l'épidémie.

Retrouver les valeurs données dans le texte pour  $q = 0.95$ ,  $N = 10, 20, 30$  et  $I_0 = 1, 2, 3$ .

3) Construire une fonction SCILAB prenant pour arguments  $N$ ,  $p = 1 - q$  et  $i$  (état initial) qui simule une trajectoire de la chaîne jusqu'à l'atteinte de l'état 0 et retourne la valeur de  $T$  durée de l'épidémie pour cette trajectoire.

**Indication** : on pourra utiliser la pseudo-inverse de la fonction de répartition binomiale (obtenue à partir d'une ligne de  $P$ ) pour simuler le saut de la chaîne entre deux instants consécutifs.

#### Questions subsidiaires

4) Estimation empirique de  $T$  : construire un script ou une fonction SCILAB prenant pour arguments  $N$ ,  $p = 1 - q$  et  $i$  (état initial) qui trace sur un même graphe le diagramme en bâtons des  $K = 100$  valeurs simulées de  $T$  et la valeur calculée de  $E_i(T)$  et qui calcule la moyenne et l'écart type empiriques de  $T$  sur ces trajectoires.

**Indication** : on utilisera `plot2d` avec l'argument optionnel `rect=.` pour tracer la droite  $y = E_i(T)$  et un cadre adapté au diagramme ; celui-ci sera tracé grâce à la fonction `xsegs`.

5) Étude de la suite récurrente déterministe : tracer sur un même graphe, la fonction  $y = g(x) = (1-x)(1-\exp(-Ax))$  où  $A = -N \ln q$  et la droite  $y = x$ . Calculer, pour  $A > 1$ , le point fixe  $l^* > 0$ , grâce à la fonction `fsolve`.