



**T.P. Estimation de la durée optimale de brûlage (FC)**  
**(d'après Scopos vol. 11, p. 175-180)**

On suppose que la durée de vie  $T$  des composants utilisés suit une loi de Weibull de paramètres  $\gamma = 0$ ,  $\eta = 1$ ,  $\beta \in ]0, 1[$ , sa fonction de répartition s'écrit

$$F(t) = 1 - \exp(-t^\beta).$$

Calculer  $F^{-1}$ , fonction réciproque de  $F$ .

Faire tracer le graphe de la fonction  $\Phi$  définie par

$$\Phi(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(u)} 1 - F(s) \, ds = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(u)} \exp(-s^\beta) \, ds \quad \text{où} \quad \mu = E(T) = \Gamma(1 + 1/\beta).$$

Pour évaluer l'intégrale, on pourra utiliser la méthode de Riemann pour  $u$  variant de 0 à 1.

Déterminer le  $u^*$  optimal (celui qui maximise  $M(u) = (\alpha - \Phi(u))/(1 - u)$ ) et en déduire la durée optimale  $b^* = F^{-1}(u^*)$  correspondante.

*Question subsidiaire*

Dans cette partie on ne suppose plus connue la loi de  $T$ , on va reprendre la méthode précédente en travaillant à partir de la fonction de répartition empirique d'un échantillon de  $T$ .

Simuler  $N$  échantillons de taille  $n$  ( $N = 100$ ,  $n = 20$  par exemple) de loi de Weibull de mêmes paramètres que dans la question précédente (ceci permettra la comparaison des résultats).

Faire tracer la fonction de répartition  $F_n$  du premier échantillon de  $T$ . En déduire une expression de  $\Phi_n(u)$  (définie de la même façon que  $\Phi(u)$  en remplaçant la fonction de répartition  $F$  par  $F_n$ ) en fonction des statistiques d'ordre de l'échantillon  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

Faire tracer la fonction  $\Phi_n$  et construire le  $u_n^*$  et le  $b_n^*$  comme ci-dessus.

Comparer la valeur moyenne obtenue pour  $b_n^*$  sur les  $N$  échantillons à la valeur  $b^*$  obtenue dans la question précédente.

---