Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Agrégation-modélisation **2005-2006**

Étude d'un chantier routier

Daniel Flipo

Un entrepreneur de travaux publics est chargé de la réfection de chaussées à deux voies. Il procède par tronçons et répare alternativement chaque voie en établissant une circulation en alternance sur l'autre voie dans un sens puis dans l'autre afin de ne pas interrompre complètement le trafic sur la voie en travaux.

L'intérêt de l'entrepreneur est de travailler sur des tronçons de longueur la plus grande possible, sans toutefois provoquer de trop gros bouchons. Plus la longueur du tronçon en réparation sera grande, plus les files de véhicules bloquées de part et d'autre du tronçon en travaux seront longues.

On modélise les arrivées des véhicules dans chaque sens par des processus de Poisson. On rappelle les deux caractérisations du processus de Poisson : un processus de Poisson de paramètre λ peut donc être défini

- soit à partir de ses instants $(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de sauts (ici les arrivées de voitures), en disant que la suite des $\tau_i = \mathrm{T}_i - \mathrm{T}_{i-1}$ des intervalles [1] entre deux sauts consécutifs est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ ;
- soit à partir de sa fonction de comptage $\mathrm{N}(t) = \sum_i \mathbf{1}_{0<\mathrm{T}_i\leq t}$ (ici le nombre de véhicules arrivés entre les instants 0 exclu et t inclus), en disant que $\mathrm{N}(t)$ est à accroissements indépendants et que pour tout couple (t,s) de réels ($t \geq 0$, $s > 0$) l'accroissement $\mathrm{N}(t+s) - \mathrm{N}(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λs.

1. On pose $\mathrm{T}_0 = 0$.

1. Estimation du trafic

Le premier travail est d'estimer l'intensité du trafic dans chaque sens, c'est-à-dire les paramètres des deux processus de Poisson.

Quelles statistiques vaut-il mieux demander aux enquêteurs envoyés sur le terrain avant les travaux pour estimer les paramètres λ_1 et λ_2 ?

– relever les intervalles de temps séparant les passages de deux véhicules consécutifs ou bien
– compter à intervalles réguliers (une minute par exemple) le nombre de véhicules qui passent dans l'intervalle.

Suggestion : proposer des estimateurs du paramètre λ basés sur ces deux types d'observations et étudier leur biais. Proposer un estimateur sans biais et de variance minimale pour λ. On rappelle l'inégalité de Cramer-Rao pour un estimateur $\hat{\theta}$ sans biais d'un paramètre θ :

$$\mathbf{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{\mathbf{E}\Big(\big(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln \mathrm{L}_\theta(x)\big)^2\Big)}$$

où $\mathrm{L}_\theta(x)$ désigne la fonction de vraisemblance de l'échantillon.

Suggestion : simuler en SCILAB une trajectoire d'un processus de Poisson de paramètre connu et comparer graphiquement l'évolution des deux types d'estimateurs en fonction du temps.

2. Conditions de non-engorgement

On suppose maintenant connus les paramètres λ_1 et λ_2 des processus de Poisson formés par les arrivées de véhicules dans chaque sens.

L'entrepreneur installe un feu tricolore à chaque extrémité du chantier. Il doit choisir une durée de passage dans chaque sens. On suppose que les véhicules traversent le chantier de longueur L à une vitesse constante v et que chaque véhicule a besoin d'un temps a pour démarrer. Si on veut faire passer au moins K véhicules dans un sens, il faut laisser le feu au vert pendant un laps de temps d au moins égal à $a\mathrm{K}$, puis bloquer les deux feux au rouge pendant la durée de la traversée du dernier véhicule engagé soit L/v. Pour qu'il n'y ait pas engorgement, les durées d_i des feux verts dans chaque sens doivent vérifier les inégalités

$$d_1 \geq a\lambda_1(d_1 + d_2 + 2\mathrm{L}/v)$$
$$d_2 \geq a\lambda_2(d_1 + d_2 + 2\mathrm{L}/v)$$

Suggestion : justifier ces inégalités en considérant un cycle complet des feux. Comment faut-il choisir d_1 et d_2 en fonction de L lorsqu'il arrive en moyenne 4 véhicules par minute dans un sens et 3 dans l'autre, que $a = 4$ secondes et que $v = 30$ km/h ?

On considère qu'un cycle de 5 minutes pour les feux est le maximum acceptable pour les usagers, quelle doit être la longueur maximale du chantier pour respecter cette contrainte ?

Dans la suite on fixera la longueur du chantier à 600 mètres.

3. Étude de la longueur de la file de véhicules

On considère la file dans le sens 1 (celui où le flux d'arrivées est le plus intense), celle dans l'autre sens se traite de la même manière. On note X_n le nombre de véhicules en attente dans le sens 1 au n-ième cycle au moment où le feu passe au vert pour eux [2]. On aimerait savoir si (X_n) admet une loi stationnaire et la déterminer au moins approximativement si elle existe.

On admet que la suite (X_n) vérifie une équation de récurrence de la forme suivante :

(1) $$\mathrm{X}_{n+1} = (\mathrm{X}_n + \mathrm{Y}_n - \mathrm{K})^+ + \mathrm{Z}_n \qquad \text{où}$$

- (Y_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 d_1$,
- (Z_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda_1(d_2 + 2\mathrm{L}/v)$,
- les deux suites (Y_n) et (Z_n) sont indépendantes.

Suggestion : expliquer sur quoi repose la modélisation retenue ; ce modèle vous paraît-il réaliste ?

Suggestion : déduire de (1) que (X_n) est une chaîne de Markov. Que peut-on dire de sa convergence en loi lorsque n tend vers $+\infty$? Le calcul explicite de sa loi stationnaire est-il envisageable ?

2. C'est à ces instants que la longueur de la file est maximale.

Suggestion : sous SCILAB, simuler N trajectoires de la chaîne (X_i) entre les instants 1 et n ($N = 1000$ et $n = 200$ par exemple) et tracer l'histogramme des fréquences empiriques f_k des événements $\{X_n = k\}$.

On admet que le trafic se décompose de la manière suivante :
- 60% de voitures particulières de longueur 5 mètres,
- 30% d'autocars de longueur 10 mètres,
- 10% de semi-remorques de longueur 20 mètres.

Estimer la longueur moyenne de la file de véhicules en attente dans le sens 1 en régime stationnaire.

Le cahier des charges impose à l'entrepreneur la contrainte suivante : la longueur de la file de véhicules de chaque côté du chantier ne doit pas excéder 250 mètres sauf cas exceptionnel dont la probabilité est fixée à 5 %.

Peut-il signer cet engagement avec la longueur prévue du chantier ou doit-il diminuer la durée du cycle des feux (et donc la longueur du chantier fixée initialement à 600 mètres) ?

Suggestion : donner, grâce à la simulation précédente, une valeur approximative de la probabilité que la file dans le sens 1 dépasse 250 mètres en régime stationnaire.

Avril 2006

DANIEL FLIPO