Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Agrégation externe **2006–2007**

Mémo « Martingales »

Daniel Flipo

1 Espérance conditionnelle

Rappelons brièvement la définition et les propriétés de l'espérance conditionnelle.

1. Si Z est une v. a. de carré intégrable définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$, $\mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B})$ est définie comme la projection orthogonale de Z sur le sous-espace vectoriel (fermé) $\mathrm{L}^2(\mathscr{B})$ des v. a. de carré intégrable $\mathscr{B}$-mesurables :
$$\forall \mathrm{Y} \in \mathrm{L}^2(\mathscr{B}) \quad \int_\Omega \mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B}) \cdot \mathrm{Y}\,d\mathrm{P} = \int_\Omega \mathrm{Z} \cdot \mathrm{Y}\,d\mathrm{P}.$$
2. Cette définition se prolonge aux variables Z positives et aux variables Z intégrables. On a en particulier pour Z positive ou intégrable, $\mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B})) = \mathbf{E}(\mathrm{Z})$.
3. Positivité : si Z est une v. a. positive, $\mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B})$ est positive P-p.s.
4. Linéarité : si Z_1 et Z_2 sont deux v. a. intégrables et a et b deux scalaires,
$$\mathbf{E}(a\mathrm{Z}_1 + b\mathrm{Z}_2 \mid \mathscr{B}) = a\,\mathbf{E}(\mathrm{Z}_1 \mid \mathscr{B}) + b\,\mathbf{E}(\mathrm{Z}_2 \mid \mathscr{B}).$$
On a le même résultat avec deux v. a. positives et des scalaires positifs.
5. Convergence : les théorèmes de Fatou, Beppo-Levi et Lebesgue s'appliquent à la convergence des espérances conditionnelles.
6. Jensen : si $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ est convexe positive, alors $\mathbf{E}(g(\mathrm{Z}) \mid \mathscr{B}) \geq g(\mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B}))$; en particulier, pour les normes dans L^p : $\|\mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B})\|_p \leq \|\mathrm{Z}\|_p$.
7. Si $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ sont deux sous-tribus de $\mathscr{A}$,
$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B}) \mid \mathscr{C}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{C}) \mid \mathscr{B}) = \mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B}).$$
8. Si Y est $\mathscr{B}$-mesurable et sous réserve d'existence [1], $\mathbf{E}(\mathrm{YZ} \mid \mathscr{B}) = \mathrm{Y}\,\mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B})$.
9. Si Z et $\mathscr{B}$ sont indépendantes, $\mathbf{E}(\mathrm{Z} \mid \mathscr{B}) = \mathbf{E}(\mathrm{Z})$.

1. Par exemple Y et Z dans L^2, ou Y et Z positives, ou Z dans L^1 et Y bornée…

2 Notations, définitions

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et, pour tout n, on note $\mathscr{B}_n$ la sous-tribu de $\mathscr{A}$ engendrée par les variables $(X_k)_{k\leq n}$.

Dans la suite, nous supposerons les variables X_k positives ou P-intégrables afin que les espérances conditionnelles $\mathbf{E}(X_k \mid \mathscr{B}_n)$ aient un sens.

Définition 1 *On dit que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une martingale si et seulement si*

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{B}_n) = X_n \quad P\text{-p.s.}$$

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une sur-martingale, (resp. une sous-martingale) si l'égalité est remplacée par* $\leq$ *(resp.* $\geq$*).*

Il est immédiat de vérifier que si l'égalité (1) est vérifiée, on a, pour tout entier $m > n$, $\mathbf{E}(X_m \mid \mathscr{B}_n) = X_n$ P-p.s. (idem pour les inégalités de sur- et de sous-martingales).

Si la variable X_n représente la fortune d'un joueur après le n-ième jeu, dire que la suite (X_n) est une martingale exprime que le jeu est équitable. Une sur-martingale modélise un jeu défavorable pour le joueur.

3 Convergence des sur-martingales positives

Théorème 2 *Toute sur-martingale positive converge presque sûrement lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Ce résultat peut se concevoir comme une généralisation de la propriété « toute suite réelle décroissante positive (ou minorée) converge ».

Il serait naïf d'espérer un résultat du genre : « toute martingale intégrable converge presque sûrement lorsque n tend vers $+\infty$ »... considérer une suite (Y_k) de variables indépendantes prenant les valeurs 1 et -1 avec la probabilité $1/2$. La suite (X_n) définie par $X_n = \sum_{0\leq k\leq n} Y_k$ est une martingale intégrable mais aussi une promenade aléatoire récurrente nulle qui ne converge même pas en loi.

4 Convergence des sous-martingales

Théorème 3 *Toute sous-martingale* (X_n) *vérifiant* $\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(X_n^+) < +\infty$*, converge presque sûrement lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *et sa limite est* P*-intégrable.*

Remarque : la condition $\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(|X_n|) < +\infty$ implique toujours $\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(X_n^+) < +\infty$. Dans le cas d'une sous-martingale *intégrable*, il y a équivalence à cause de l'égalité $|X_n| = 2X_n^+ - X_n$ et de l'inégalité $\mathbf{E}(X_n) \geq \mathbf{E}(X_0)$ (sous-martingale intégrable).

5 Équi-intégrabilité d'une suite de v. a.

On considère dans cette section une suite (Z_n) de v. a. réelles, intégrables définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Définition 4 *La suite* (Z_n) *est dite équi-intégrable si et seulement si*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\{|Z_n|>K\}} |Z_n| \, dP \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0. \tag{2}$$

Exemples : toute suite *finie* de v. a. intégrables est équi-intégrable (pourquoi ?).
Sur $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, la suite $(Z_n = n\,\mathbf{1}_{[0,1/n]})$ est intégrable mais non équi-intégrable car $\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\{|Z_n|>K\}} |Z_n| \, dP = 1$ pour tout K (prendre $n > K$).

Proposition 5 (Deux conditions suffisantes d'équi-intégrabilité) *La suite* (Z_n) *est équi-intégrable dès que l'une au moins des deux conditions suivantes est réalisée :*

CS1) $\mathbf{E}(\sup_{n\in\mathbf{N}} |Z_n|) < +\infty$ *(condition de domination de Lebesgue)*[2].

CS2) Il existe $\alpha > 1$ *tel que* $\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(|Z_n|^\alpha) < +\infty$ *(la suite est bornée dans* L^p, $p > 1$*).*

Théorème 6 (Lebesgue « ultime »)

$$\left.\begin{array}{l} Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Proba}} Z \\ (Z_n) \text{ équi-intégrable} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} Z.$$

6 Convergence des martingales

Théorème 7 *Soit* (X_n) *une martingale intégrable.*
Les conditions suivantes sont équivalentes :

C1) X_n *converge dans* L^1.

C2) $\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(|X_n|) < +\infty$ *(donc* X_n *converge P-p.s. d'après le théorème de convergence des sous-martingales) et sa limite* X_∞ *vérifie, pour tout* n, $X_n = \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathscr{B}_n)$.

C3) Il existe une v. a. X' *intégrable telle que* $X_n = \mathbf{E}(X' \mid \mathscr{B}_n)$.

C4) La suite (X_n) *est équi-intégrable.*

Lorsqu'une de ces conditions est réalisée, on dit que la martingale (X_n) *est* régulière.

Remarque : toute martingale *positive* converge P-p.s. mais ceci *n'assure pas* que sa limite vérifie, pour tout n, $X_n = \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathscr{B}_n)$, (penser à la chaîne de Galton-Watson dans le cas $m = 1$, $X_0 = 1$: c'est une martingale positive, intégrable, qui converge presque sûrement vers 0). Cet exemple montre également que, même dans le cas des martingales, la condition $\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(|X_n|) < +\infty$ *n'assure pas*, à elle seule, l'équi-intégrabilité.

2. À ne pas confondre avec $\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(|Z_n|) < +\infty$, condition plus faible, qui n'assure pas l'équi-intégrabilité de (Z_n), cf. la suite $(Z_n = n\,\mathbf{1}_{[0,1/n]})$.

7 Théorème d'arrêt

Théorème 8 *Soit* (X_n) *est une martingale régulière et* ν_1 *et* ν_2 *deux temps d'arrêt (relativement à la suite de tribus* $\mathscr{B}_n$*), on a*

(3) $$X_{\nu_1} = \mathbf{E}(X_{\nu_2} \mid \mathscr{B}_{\nu_1}) \quad P\text{-p.s. sur } \{\nu_1 \leq \nu_2\}.$$

Exemple d'application. Pour la ruine du joueur avec $p = q$, la fortune X_n du joueur 1 est une martingale régulière (pourquoi ?). Le théorème d'arrêt appliqué à l'instant ν d'atteinte des états récurrents permet de calculer la probabilité de ruine du joueur 2. Le faire en exercice en calculant $\mathbf{E}(X_\nu)$.
Lorsque $p \neq q$, X_n n'est plus une martingale, mais $Z_n = (q/p)^{X_n}$ en est une, on peut encore en déduire les probabilités de ruine des deux joueurs.

Références

[1] Jacques NEVEU, *Martingales à temps discret*, Masson (1972).

[2] Jean-Yves OUVRARD, *Probabilités tome 2, Maîtrise–Agrégation*, Cassini.

[3] David WILLIAMS, *Probability with martingales*, Cambridge University Press.

Les démonstrations des résultats énoncés ci-dessus se trouvent dans [1], chapitres II et IV.